Coppa Fermat

Genova, 2 Aprile 2004

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1.4142$ $\sqrt{3} = 1.7321$ $\sqrt{7} = 2.6458$ $\pi = 3.1416$.

1. Il mosaico Nel 2000, anno internazionale della matematica, l'Unione Matematica Mondiale ha scelto l'atollo di Tematamaki per ospitare strutture per lo sviluppo e la diffusione della ricerca matematica. Nello stesso anno, è stato costruito un salone dei ricevimenti, il cui pavimento è un semplice mosaico, costituito da una tabella di 99×99 piastrelle quadrate, che sono tutte di marmo di Carrara ad eccezione di quelle sul bordo e sulle due diagonali. Determinare quante sono le piastrelle di marmo di Carrara nel mosaico.

2. L'armatura Il principale eroe nella storia dell'atollo, il guerriero Matteo, vestiva una bellissima armatura, del peso complessivo di 21.4 kg, composta da un elmo, uno scudo ed una corazza. L'elmo pesava 3 kg meno dello scudo, il quale a sua volta pesava 4 kg meno della corazza. Determinare quanti grammi pesava lo scudo del guerriero Matteo.

3. Abusivismo Purtroppo, si sa, tutto il mondo è paese, ed un gran numero di ville abusive è stato costruito anche sulle rive dell'atollo. Per avere un quadro complessivo della situazione, Carabinieri e Guardia di Finanza sono partiti da due punti diversi della riva e hanno contato le costruzioni abusive procedendo in senso orario. In questo modo, la quinta villa contata dai Carabinieri è risultata la millesima per la Guardia di Finanza, e la quinta villa contata dalla Guardia di Finanza è risultata la millesima per i Carabinieri. Determinare quante ville abusive sono state costruite.

4. Padri e figli Domenico si sente "giovane dentro", ma sua figlia Ilaria lo riporta alla realtà dicendo: "L'anagrafe parla chiaro: oggi tu hai 25 anni più di me, e tra esattamente 8 anni la tua età sarà il doppio della mia". Determinare quanti anni hanno oggi Domenico e Ilaria.
Nella risposta usare le prime due cifre a sinistra per l'età del padre e le rimanenti per quella della figlia.

5. L'atollo La forma dell'atollo Tematamaki ricorda una lettera V, che si può pensare ottenuta prendendo due trapezi isosceli uguali ed incollandoli per un lato obliquo. Sapendo che i rimanenti due lati obliqui dei trapezi stanno sulla stessa retta, determinare la misura in gradi dell'angolo tra un lato obliquo e la base minore nei due trapezi.

6. Il summit I rappresentanti di sei potenze internazionali sono stati convocati per un summit sull'atollo. I rappresentanti siedono intorno ad un tavolo rotondo, in cui per convenzione i posti sono stati indicati con 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5. Si sa che potenze con esponenti consecutivi non siedono mai vicine, che la somma dei due vicini del 16 non è un multiplo di 3, e che il 2 siede immediatamente a destra dell'8. Determinare come siedono le potenze intorno al tavolo.
Nella risposta si scrivano, da sinistra verso destra, gli esponenti delle quattro potenze di 2 che si incontrano a partire da 2^0 (escluso) e procedendo in senso orario.

1. Le piastrelle di marmo di Carrara si trovano sottraendo da tutte le piastrelle quelle che non sono di marmo di Carrara: due lati completi, due lati senza gli estremi così come le due diagonali, ma facendo attenzione a non prendere due volte la piastrella all'intersezione delle diagonali. Perciò

$$\begin{aligned} 99 \times 99 - 99 \times 2 - 97 \times 4 + 1 &= \\ &= 99 \times 97 - 97 \times 4 + 1 \\ &= 97 \times 95 + 1 = 9216. \end{aligned}$$

2. Sia e il peso dell'elmo, c quello della corazza e s quello dello scudo, tutti espressi in gr.

$$\begin{cases} e = s - 3000 \\ s = c - 4000 \\ e + c + s = 21400 \end{cases}$$

Perciò, dalle prime due, $e + c = 2s + 1000$; dalla terza, $s = \frac{20400}{3} = 6800$.

3. Calcoliamo quante ville contano i finanzieri fino a quella da cui partono i carabinieri esclusa: $1000 - 5 = 995$. Simmetricamente, lo stesso numero contano i carabinieri fino a quell da cui partono i finanzieri. Il totale delle villette abusive è pertanto

$$2 \times 995 = 1990$$

4. Siano d l'età di Domenico e i quella di Ilaria quando Ilaria parla:

$$\begin{cases} d = 25 + i \\ d + 8 = 2(i + 8) \end{cases}$$

Perciò $i = 17$ e $d = 25 + 17 = 42$. La risposta è 4217.

5. Consideriamo il triangolo isoscele i cui lati obliqui sono le basi maggiori dei trapezi. Dato che gli angoli alla base dei trapezi sono tutti uguali, diciamo di ampiezza a, la somma degli angoli interni del triangolo è quattro volte a. Perciò $180 = 4a$ e $a = 45$. Così l'angolo tra lato obliquo e base minore è $180 - 45 = 135$.

6. Molto schematicamente, alla tavola sappiamo già che siedono $\begin{array}{ccc} 2 & & 8 \\ & \bigcirc & \end{array}$. Il 16 sta tra 1 e 4, che non possono stare a destra del 2 perché sue potenze consecutive. Non ci sta neppure il 16. Perciò, alla destra del 2, siede il 32:

$$\begin{array}{ccc} & 2 \quad 8 & \\ 32 & \bigcirc & \end{array}$$

Dato che a sinistra dell'8 non può stare il 4, la disposizione è $\begin{array}{ccc} & 2 \quad 8 & \\ 32 & \bigcirc & 1 \\ & 4 \quad 16 & \end{array}$ Dunque la risposta è 4251.

7. A me gli occhi Sulla porta dello studio di un noto ipnotista, Dr. Gio MindFlyer, appare un logo costituito da un quadrato, nel quale è inscritto un cerchio, nel quale è inscritto un quadrato, nel quale è inscritto un cerchio, e così via. In totale, nel logo compaiono 15 quadrati, dei quali il più piccolo ha il lato lungo 1 mm. Determinare quanti millimetri misura il lato del quadrato più grande.

8. Radicali liberi Per provare le loro nuove calcolatrici, Sara e Alessandro scrivono lo stesso numero di 4 cifre e poi ne calcolano, rispettivamente, la radice quarta e la radice sesta. Con grande stupore, entrambi ottengono come risultato un intero. Determinare quale numero hanno scritto all'inizio.

9. Vela Nella prima regata della stagione, la barca vincitrice ha completato il percorso in un'ora e mezza. La seconda regata si è svolta su un percorso più lungo del 10% e, per le diverse condizioni atmosferiche, la barca vincitrice ha tenuto una velocità media inferiore del 10% rispetto alla vincitrice della gara precedente. Determinare quanti secondi ha impiegato la vincitrice della seconda regata per completare il percorso.

10. Skating In una gara di skateboard, i concorrenti sono valutati da 8 giudici, ciascuno dei quali esprime un voto intero da 0 a 9 (estremi compresi). A questo punto si scartano il voto più alto ed il voto più basso (se c'è più di un voto massimo se ne scarta uno solo, e analogamente per il voto minimo) e la somma dei rimanenti è il punteggio totale ottenuto dall'atleta. Al termine della prestazione di Paolo, l'altoparlante annuncia: "I giudici hanno assegnato a Paolo punteggi tutti diversi. Il totale è 23 ed i punteggi dei singoli giudici sono stati 5, 3, 2, 8, ...". A questo punto l'altoparlante smette di funzionare e non si sentono le valutazioni assegnate dai rimanenti 4 giudici. Scrivere, da sinistra verso destra, in ordine crescente, i punteggi mancanti.

11. Quanti pesci! All'acquario di Genova, la vasca della barriera corallina contiene pesci di molte specie: una tabella mostra al pubblico quanti pesci di ogni specie nuotano nella vasca. La specie più numerosa è quella del pesce pagliaccio: sono 100. Massimo, durante la visita, nota una strana coincidenza: le quantità sulla tabella sono tutte diverse, e ciascuna è il prodotto di 4 fattori primi, non necessariamente distinti (ad esempio $100 = 2\cdot2\cdot5\cdot5$). Determinare il massimo numero di pesci che nuotano nella vasca.
Si ricorda che 1 *non* è un numero primo.

12. Tempus fugit Questa gara è iniziata (o almeno doveva iniziare) alle 14:00:00 e terminerà alle 16:00:00. Durante lo svolgimento, l'ora è costantemente indicata da un orologio digitale a 6 cifre (2 per le ore, 2 per i minuti, 2 per i secondi). Determinare per quanti secondi, durante la gara, le 6 cifre indicate dall'orologio saranno diverse.

7. Il diametro della circonferenza circoscritta ad un quadrato è la diagonale del quadrato, Il lato del quadrato circoscritto ad una circonferenza è il diametro della circonferenza. Quindi, la lunghezza del lato di un quadrato nel logo è $\sqrt{2}$ volte del lato del quadrato incluso successivo. I lati dei quadrati nel logo, dal più piccolo, sono dunque:

$$\begin{aligned} 1\text{mm} = &(\sqrt{2})^0\text{mm} \quad \sqrt{2}\text{mm} = (\sqrt{2})^1\text{mm} \\ &(\sqrt{2})^2\text{mm} \qquad\qquad (\sqrt{2})^3\text{mm} \\ &\vdots \\ &(\sqrt{2})^{14}\text{mm} = 2^7\text{mm} = 128\text{mm}. \end{aligned}$$

8. Rovesciamo la ricerca: vogliamo un numero che, elevato alla sesta, dia un risultato di 4 cifre. E' $5^6 = (125)^2 > 100^2 = 10000$: perciò il numero cercato è minore di 5. 2^6 e 3^6 hanno radice quarta non intera; 1^6 non ha 4 cifre. Rimane da provare $4^6 = (2^2)^6 = (2^3)^4$. Risposta: 4096.

9. La velocità media v è $\frac{s}{t}$, quando s è lo spazio percorso nel tempo t. Siano s_1, t_1 la distanza della prima gara e il tempo impiegato dalla vincitrice; siano s_2, t_2 i rispettivi valori della seconda gara. I dati del problema si scrivono così:

$$\begin{cases} t_1 = 60 \times 90\text{sec} \\ s_2 = s_1 + \frac{10}{100}s_1 \\ \frac{s_2}{t_2} = \frac{s_1}{t_1} - \frac{10}{100}\frac{s_1}{t_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = 5400\text{sec} \\ \frac{s_2}{s_1} = \frac{11}{10} \\ t_2 = \frac{10}{9}\frac{s_2}{s_1}t_1 \end{cases}$$

Si calcola $t_2 = \frac{10}{9}\frac{11}{10}5400\text{sec} = 6600\text{sec}$.

10. Dei sei numeri che contribuiscono effettivamente alla somma, i numeri pari sono al massimo quattro (0 viene comunque escluso); così pure i numeri dispari. Dato che la somma 23 è dispari, gli addendi dispari devono essere in numero dispari: tre. Tra questi vi sono certamente 3 e 5. Dato che $8 + 5 + 3 + 2 = 18$, il numero 7 può essere uno dei voti soltanto se 8 non contribuisce al risultato, cioè è il massimo voto; ma $7 + 5 + 3 + 2 = 17$, e gli altri tre voti devono essere pari. $\lightning$ (impossibile)
La somma $8 + 5 + 3 + 2 = 18$ contribuisce effettivamente al punteggio finale di Paolo e i voti estremi sono altri. Tra i numeri non uditi, due devono sommare a 5: soltanto 1 e 4. La risposta è 0149.

11. Elenchiamo tutti i numeri minori di 100 che sono prodotto di quattro numeri primi: il numero primo 13 non può comparire perché $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 = 104$. Così, il più grande prodotto con tre fattori 2 è $2\cdot2\cdot2\cdot11$. Allo stesso modo, con due fattori 2 è $2\cdot2\cdot3\cdot7$; con un singolo fattore 2 è $2\cdot3\cdot3\cdot5$ e con nessun fattore 2 è $3\cdot3\cdot3\cdot3$. L'elenco è così

$2\cdot2\cdot2\cdot11$	$2\cdot2\cdot3\cdot7$	$2\cdot3\cdot3\cdot5$	$3\cdot3\cdot3\cdot3$
$2\cdot2\cdot2\cdot7$	$2\cdot2\cdot3\cdot5$	$2\cdot3\cdot3\cdot3$	
$2\cdot2\cdot2\cdot5$	$2\cdot2\cdot3\cdot3$		.
$2\cdot2\cdot2\cdot3$			
$2\cdot2\cdot2\cdot2$			

Dunque al massimo ci sono 12 specie e il numero dei pesci in quel caso è

$$\begin{aligned} 100 + 88 &+ 84 + 90 + 81 + 56 + 60 + \\ &+ 54 + 40 + 36 + 24 + 16 = 729 \end{aligned}$$

12. Le prime due posizioni possono essere soltanto due, 14 oppure 15. Una volta fissate queste (diverse), le due posizioni per le decine (di minuti e secondi) possono essere $4 \cdot 3$; infine, le due posizioni per le unità possono essere $6 \cdot 5$. In totale, le posizioni sono $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 5 = 720$.

13. Grazie, Splaffy! Valentina in classe ha copiato dalla lavagna lo svolgimento di una moltiplicazione. Poi è andata all'Acquario. Passando sul ponte della vasca delle foche, le cade lo zaino; la foca Splaffy lo recupera e lo porta all'asciutto. Il quaderno si è bagnato, per cui molte delle cifre della moltiplicazione risultano non più leggibili. La situazione è descritta dallo schema sottostante, in cui le cifre illeggibili sono state sostituite da degli asterischi.

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & * & * & \times \\ & & & * & * & = \\ \hline & & * & 6 & \underline{1} & \\ & * & * & 4 & & \\ \hline & * & * & * & * & \end{array}$$

Nonostante il disastro, Valentina riesce ugualmente a ricostruire il calcolo. Determinare il risultato della moltiplicazione.

14. Big Brother Il noto format televisivo è giunto anche sull'atollo e molto presto un certo numero di matematici verrà isolato in un'apposita zona per oltre tre mesi. Per evitare ogni contatto con l'esterno, la zona sarà circondata da un muro a pianta quadrata, alto 3 metri, spesso quanto un mattone, con lato esterno di 100 metri. Per realizzare il muro, si hanno a disposizione dei mattoni lunghi 20 cm, con profondità e altezza pari a metà della lunghezza. Ogni mattone costa 10 centesimi di euro. Per rendere il muro più solido, la costruzione avverà nel modo usuale, cioè disponendo i mattoni su più file a partire da terra, con ogni fila sfasata di mezzo mattone rispetto alla fila sottostante. Se fosse necessario tagliare a metà qualche mattone, una ditta si offre di farlo al prezzo di 20 centesimi di euro a taglio. Determinare quanti euro costerà, come minimo, la costruzione del muro.
Si trascurino il costo e lo spazio occupato dal cemento che serve per tenere insieme i mattoni.

15. Simboli esoterici In una grotta dell'atollo, gli archeologi hanno rinvenuto molte pitture rupestri. Tutte le pitture contengono al loro interno un certo tipo di "triangolo magico", evidentemente legato ai riti degli antichi abitanti dell'isola. Schematicamente si tratta di un triangolo isoscele, in cui sono tracciate l'altezza rispetto alla base e la congiungente i punti medi dei due lati uguali. Si hanno così 5 segmenti, che determinano 7 punti, in cui sono scritte tutte e sole le cifre da 1 a 7, in modo che, su ciascuno dei 5 segmenti tracciati, la somma dei 3 numeri che appaiono sia sempre la stessa. Leggendo da sinistra verso destra le 3 cifre scritte sulla base, si ottiene un intero di 3 cifre.
Determinare la differenza tra il massimo ed il minimo valore che può assumere l'intero scritto sulla base.

16. Acque territoriali L'apertura della baia dell'atollo Tematamaki, cioè la base del triangolo isoscele che ha come lati obliqui le basi minori dei due trapezi, è di 20km (vedi la descrizione dell'atollo in un problema precedente). Le acque territoriali dell'atollo si estendono fino a 20km dalla riva.
Determinare quanti chilometri misura la differenza tra il perimetro esterno delle acque territoriali ed il perimetro dell'atollo.

17. Tocchiamo ferro Un'antica profezia dice che l'atollo verrà inghiottito dalle acque del mare, e che questo accadrà in un anno il cui numero è la differenza tra due numeri palindromi (cioè che non cambiano leggendoli da sinistra verso destra, o da destra verso sinistra) di 4 cifre. Le cronache ricordano le scene di panico del 1782 (che è $5005 - 3223$), mentre l'ultima volta che gli abitanti hanno rischiato è stata nel 2002 (che si scrive, ad esempio, come $5225 - 3223$).
Determinare il prossimo anno in cui gli abitanti dovranno preoccuparsi.

13. Le cifre delle unità dei due fattori sono dispari e possono essere 1 e 1, 3 e 7, oppure 9 e 9. La prima coppia presenta immediatamente la situazione inaccettabile

$$\begin{array}{cccccc} & & 2 & 6 & 1 & \times \\ & & & 4 & 1 & = \\ \hline & & 2 & 6 & \underline{1} & \\ 1 & 0 & 4 & 4 & & \\ \hline 1 & 0 & 7 & 0 & 1 & \end{array}$$

La coppia con i due 9 è da scartare, perché un prodotto $2{*}{*}\times 9$ ha certamente più di tre cifre; allo stesso modo, per la coppia di 3 e 7, la cifra 7 può solo essere quella delle unità del primo fattore. Perciò la seconda deve essere 8 e la moltiplicazione si presenta così

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 8 & 7 & \times \\ & & 2 & 3 & = \\ \hline & 8 & 6 & \underline{1} & \\ 5 & 7 & 4 & & \\ \hline 6 & 6 & 0 & 1 & \end{array}$$

14. Non serve tagliare mattoni: ogni giro consiste di due file (su lati paralleli) da $\frac{100\text{m}}{20\text{cm}} = 500$ mattoni e di due file con un mattone in meno; in totale, 1998 mattoni.
Si fanno $\frac{3\text{m}}{10\text{cm}} = 30$ file. Dunque il costo è di $30 \cdot 1998 \cdot \frac{1}{10} = 5994$ euro.

15. Determiniamo le somme possibili: il triangolo si presenta così

$$\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ & * & * & * & \\ * & & * & & * \end{array}$$

Sia s una somma possibile: tutte le cifre compaiono in due delle cinque addizioni che producono s, ed esattamente una cifra (quella all'intersezione dell'altezza e della congiungente i punti medi, chiamiamola a), compare in tre addizioni. Dato che la somma dei primi sette numeri è $\frac{1}{2}7 \cdot 8 = 28$, il numero s deve verificare la condizione

$$5s = 2 \cdot 28 + a = 56 + a.$$

C'è un'unica possibilità: $s = 12$ e $a = 4$. Dunque, la cifra 4 non può comparire nella riga di base. La sequenza alla base che dà il numero massimo è 7 3 2, quella che dà il numero minimo è 1 5 6. La differenza è 576.

16. Ricordiamo, da un esercizio precedente, che l'angolo formato dall'insenatura dell'atollo è retto.
Rispetto al perimetro dell'atollo, il perimetro esterno delle acque territoriali presenta in più:
• tre archi di circonferenza, in corrispondenza dei tre vertici esterni dell'atollo, la somma delle cui ampiezze è un angolo giro
• due archi di circonferenza, alla bocca dell'insenatura, con ampiezza $\frac{\pi}{6}$ ciascuno.
Di contro, le due basi minori non hanno tratti di acque territoriali corrispondenti; queste formano un triangolo rettangolo insieme con la bocca dell'insenatura. La differenza è

$$2\pi \cdot 20\text{km} + \frac{\pi}{3} \cdot 20\text{km} - \sqrt{2} \cdot 20\text{km} = \left(\frac{7\pi}{3} - \sqrt{2}\right) \cdot 20\text{km}.$$

Usando i valori approssimati, si trova $5.9162 \cdot 20\text{km} = 118.324\text{km}$ e la risposta è 118.

17. Notiamo che un numero palindromo di 4 cifre si può scrivere come $1001a + 110b$; la differenza di due tali palindromi è

$$(1001a + 110b) - (1001c + 110d) = 1001(a - c) + 110(b - d)$$

Quindi la minima differenza tra due palindromi di 4 cifre è

$$11 = 1001 - 9 \cdot 110$$

ed è anche la minima differenza tra due differenze di palindromi di 4 cifre.
Perciò il prossimo anno infausto sarà nel $2002 + 11 = 2013$.

18. Le mascotte Due caprette sono ormai ospiti fisse dell'Istituto Matematico dell'atollo. Affinché non si allontanino durante la notte, la prima capra viene legata ad un palo mediante una corda lunga 5 metri, mentre la seconda capra viene legata ad un secondo palo, distante 5 metri dal precedente, mediante una seconda corda lunga anch'essa 5 metri. Nella zona accessibile ad entrambe le capre, si trova una vasca quadrata, con due lati paralleli alla congiungente i due pali, contenente, in appositi scomparti, l'acqua ed il cibo per le due capre.
Determinare quanti millimetri può misurare, al massimo, il lato della vasca.

19. Non si smentiscono mai! Per fare un regalo all'organizzatore, alcuni partecipanti a questa gara hanno indetto una raccolta fondi: la maggioranza ha messo 20 euro a testa, mentre una minoranza, costituita da tutti i genovesi, ha contribuito con 15 euro a testa. Poiché alla fine i soldi non erano ancora sufficienti, tutti quanti hanno versato un altro euro a testa. Così facendo sono stati complessivamente raccolti 600 euro.
Determinare quante persone hanno partecipato alla raccolta.

20. Ombre "tematamakesi" Il lampadario tradizionale usato sull'atollo ha una struttura di filo di ferro costituita da tanti fili corrispondenti ai lati ed alle diagonali delle facce di un cubo. Al centro del cubo è posta una lampadina. La struttura è circondata da un paralume sferico, il cui raggio misura 20 cm, passante per tutti i vertici del cubo. Quando si accende la lampadina, l'ombra dei fili di ferro viene proiettata sulla superficie del paralume.
Determinare, in millimetri, la lunghezza complessiva delle ombre proiettate sul paralume.
Si pensi che la lampadina sia puntiforme e sia sostenuta al centro del cubo mediante dei fili così sottili da non produrre ulteriori ombre.

21. Giardini... d'annata Nel XIX secolo, per festeggiare un evento glorioso nella storia dell'atollo, le autorità hanno deciso di costruire un grande giardino a forma di triangolo rettangolo. Nei vertici e lungo tutto il perimetro sono stati piantati degli alberi, a distanza regolare gli uni dagli altri. Si sa che il numero totale degli alberi coincide con l'anno di costruzione del giardino, e che sull'ipotenusa (estremi compresi) c'è un albero in più che sul cateto maggiore (estremi compresi).
Determinare quanti alberi ci sono attorno al giardino.

22. La decimazione Nella seguente espressione

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}+\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}$$

Federico vuole eliminare alcuni addendi, in modo che la somma dei restanti sia 1.
Determinare quanto può valere, al massimo, il prodotto dei denominatori delle frazioni restanti.

18. Il quadrato massimo deve avere i vertici sulle circonferenze. Si tracci il diametro che congiunge i due centri e si congiunga un vertice del quadrato con i due estremi del diametro. L'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo così ottenuto (iscritto in una semicirconferenza) è metà del lato ℓ del quadrato. Di conseguenza, per il secondo teorema di Euclide,

$$\frac{\ell}{2}=\frac{5-\ell}{2}\left(10-\frac{5-\ell}{2}\right).$$

Prendendo la soluzione positiva $\ell=\frac{5}{2}(\sqrt{7}-1)$ e usando i valori approssimati, si trova che la risposta è 4114.

19. Siano a la maggioranza e b i genovesi. deve essere $21a+16b=600$. In particolare, $16b=600-21a$; perciò b deve essere divisibile per 3. Anche $600-16b=21a$; dunque la differenza deve essere divisibile per 7 (cioè la somma delle decine e unità con il doppio della cifra delle centinaia è divisibile per 7).
$b=0$, $600-16b=600$: non va bene.
$b=3$, $600-16b=552$: non va bene.
$b=6$, $600-16b=504$: funziona.
Viene $a=504:21=24$ e le persone sono $24+6=30$.

20. L'ombra di un rettangolo formato da due diagonali complanari parallele dai due lati che le congiungono è una circonferenza massima sulla sfera. Ci sono 6 rettangoli del genere. La lunghezza delle ombre è

$$6\cdot 200\cdot 2\pi\text{mm}=2400\pi\text{mm}.$$

Usando i valori approssimati, la risposta è 7539.

21. Gli alberi sono tanti quanti gli spazi regolari tra essi. Siano a e b gli spazi regolari sui cateti (se volete, la lunghezza dei due cateti misurata in "spazi regolari"). Deve essere $(a+1)^2=a^2+b^2$. Perciò, eliminando a^2 da ambo i membri, è $2a+1=b^2$.
La somma di tutti gli alberi $(a+1)+a+b=2a+1+b=B^2+b$ è un numero intero compreso tra 1800 e 1900. Come valori possibili per b si trovano 42 e 43. Dato che b^2 è dispari—è uguale a $2a+1$—, deve essere $b=43$. La risposta è dunque $b^2+b=1892$.

22. La frazione $\frac{1}{11}$ va eliminata perché non c'è modo di ottenere $\frac{10}{11}$ con le altre dato che 11 non è prodotto o fattore di altri denominatori; lo stesso per $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{9}$. la frazione $\frac{1}{5}$ va eliminata perché $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ e non c'è altro per completare a 1. Così pure $\frac{1}{10}$ va eliminata.
Poi, $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, così $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$, così $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$. Il prodotto massimo è $2\cdot 4\cdot 6\cdot 12=576$.

23. E dopo tanta fatica ... Per riprendersi dalle fatiche di questa gara, i 7 componenti di una squadra hanno organizzato una spaghettata aglio, olio e peperoncino. Le dosi di pasta che vengono servite sono uguali per tutti tranne che per il capitano, che ha diritto ad una razione doppia, ed il consegnatore, che avendo corso tanto ha diritto ad una razione tripla.

Sapendo che nel sugo sono stati messi 4 peperoncini interi, e che i piatti sono stati fatti a caso dopo aver mescolato bene la pasta con il sugo, determinare la probalilità che almeno un commensale si ritrovi nel piatto più di un peperoncino.

Espressa la probabilità come frazione m/n irriducibile, si scriva nella risposta la somma $m+n$.

24. Un meccanismo ... infernale Tre ruote dentate hanno i centri allineati e sono collegate tra di loro in modo che, quando la ruota centrale gira, girano anche le altre due. La ruota centrale ha 39 denti, le altre due hanno 38 e 52 denti, rispettivamente. In posizione di riposo, viene disegnata sulle ruote la linea che unisce i centri. Successivamente, il meccanismo viene messo in movimento alla velocità costante che consente alla ruota centrale di compiere un giro completo in 3 minuti e mezzo.

Determinare dopo quanti secondi si ha che per la prima volta i tre segmenti disegnati sulle tre ruote risultano paralleli.

23. Marchiamo A, B, C, D i quattro peperoncini: tutte le distribuzioni possibili sono 10^4. Per convincersene, consideriamo che una porzione sia fatta con un mescolo pieno, la decima presa con il mescolo svuota la pentola. Ogni peperoncino sceglie, indipendentemente dagli altri, in quale presa "entrare".

Contiamo ora in quanti modi i quattro peperoncini possono finire in piatti diversi—esattamente il contrario di quanto richiesto dal problema.

Caso 1. I quattro peperoncini finiscono in piatti con porzioni normali (ottenuti con un mescolo). A ha 5 scelte; dopo la sua, B ha 4 scelte (non può scegliere come A). Poi C ha 3 scelte e D resta con 2 scelte. In totale, i casi di questo tipo sono $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Caso 2. Tre peperoncini finiscono in tre piatti normali e uno nel piatto con porzione doppia. Sceglie prima il peperoncino che deve andare nel piatto doppio (A o B o C o D), poi questo sceglie in quale dei 2 mestoli per il piatto doppio vuole finire. A questo punto, (come prima) in ordine alfabetico, i rimanenti scelgono in successione in quale mestolo per porzione normale finire: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilità. In totale, i casi di questo tipo sono $4 \cdot 2 \cdot 60 = 480$.

Caso 3. Tre peperoncini finiscono in tre piatti con porzioni normali e uno nel piatto con porzione tripla. Si fa come prima e si trovano $4 \cdot 3 \cdot 60 = 720$ casi di questo tipo.

Caso 4. Due peperoncini finiscono in piatti normali, uno nel piatto con porzione doppia, uno nel piatto con porzione tripla. Si fa come prima, facendo attenzione che, dopo aver scelto il peperoncino per la porzione doppia, restano tre scelte per il peperoncino per la porzione tripla: si trovano $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 1440$ casi.

La somma di tutti questi è $120 + 480 + 720 + 1440 = 24 \cdot (5 + 20 + 30 + 60) = 24 \cdot 115$. Quindi la probabilità che capiti un caso non contemplato tra questi è

$$\frac{10^4 - 24 \cdot 115}{10^4} = 1 - \frac{12 \cdot 23)}{10^3} = 1 - \frac{69}{250} = \frac{181}{250}.$$

La risposta è $181 + 250 = 431$.

24. Sia d il numero di denti che sono passati dalla posizione iniziale della ruota centrale ad un certo momento. In quel momento, la linea sulla ruota centrale ha coperto un angolo di ampiezza $\frac{2\pi}{39}d$. Le linee sulle altre ruote hanno coperto ampiezze $-\frac{2\pi}{38}d$ e $-\frac{2\pi}{52}d$, rispettivamente. Perché siano parallele, gli angoli devono differire per (un multiplo di) π:

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{38}d + \frac{2\pi}{39}d = h\pi \\ \frac{2\pi}{38}d - \frac{2\pi}{52}d = k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} 77d = 19 \cdot 13 \cdot 3h \\ 7d = 19 \cdot 13 \cdot 2k \end{cases}$$

Perciò $3h = 2 \cdot 11k$.

I più piccoli numeri interi positivi per cui questa condizione è verificata sono $h = 22$ e $k = 3$. In questo momento sono passati $\frac{19 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3}{7}$ denti dalla posizione iniziale.

Dato che un dente passa in $\frac{210\text{sec}}{39} = \frac{70}{13}\text{sec}$, il tempo trascorso è

$$\frac{19 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3}{7} \cdot \frac{70}{13}\text{sec} = 1140\text{sec}.$$