Coppa Fermat

Genova, 2 aprile 2003

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero, compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Se quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
$\sqrt{2} = 1.4142$ $\sqrt{3} = 1.7321$ $\pi = 3.1416$.

1. La bandiera comunale La bandiera di Genova è formata da una croce rossa su sfondo bianco. I bracci della croce sono paralleli ai lati della bandiera e la attraversano per tutta la sua lunghezza e tutta la sua larghezza. Il Sindaco di Genova commissiona una grande bandiera che dovrà sventolare sul palazzo del Comune. Essa dovrà essere lunga tre metri e alta un metro e ottanta centimetri, mentre i bracci della croce dovranno essere larghi venti centimetri. Determinare quanti centimetri quadrati misurerà l'area della superficie rossa su una faccia della bandiera.

1. I bracci orizzontali sono lunghi 300cm, quelli verticali 180 cm. Formano due rettangooli che si sovrappongono al centro su un quadrato di 20cm di lato. Allora l'area è $(300 \cdot 20 + 180 \cdot 20 - 20 \cdot 20)\text{cm}^2 = 9200\text{cm}^2$.

2. Vittoria palindroma Da un giornale dell'anno 3003: "Quest'anno la consueta gara a squadre di Genova è stata vinta dal Liceo 'Rosolini'. Il capitano della squadra vincitrice ha subito fatto notare che il punteggio realizzato è il più piccolo intero di quattro cifre che sia contemporaneamente palindromo e divisibile per 9". Determinare quanti punti ha realizzato il Liceo 'Rosolini'.
Nota: un numero si dice palindromo se non cambia leggendolo da sinistra verso destra, oppure da destra verso sinistra (come ad esempio 313 e 851158).

2. Un numero palindromo di quattro cifre si scrive $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$ per a e b cifre. Inoltre, per il criterio di divisibilità per 9, 9 divide $2 \cdot a + 2 \cdot b = 2(a+b)$, dunque divide $a + b$. La soluzione minima si trova per $a = 1$ e 9 deve dividere $1 + b$, perciò $b = 8$. La soluzione è 1881.

3. La colpa è sempre dei giornalisti Da un giornale del 4003: "Quest'anno la consueta gara a squadre di Genova ha visto la partecipazione di ben 9999 squadre. La classifica completa della gara è riportata nella tabella sottostante [di cui qui per brevità riportiamo solo l'inizio!]:

1	**Nome squadra**
2	Liceo 'Scoglio'
3	Liceo 'Boskov'
4	Istituto Spaziale 'Mancini'
5	Ginnasio Astronavale 'Skuhravy'

Si noti in particolare che il Liceo 'Rosolini', che ha vinto per l'ultima volta esattamente 1000 anni fa, si trova quest'anno solo alla riga contrassegnata dal numero 4003".
Tuttavia, la tabella è stata compilata piuttosto in fretta e contiene due grossolani errori: il primo è che al numero 1 corrisponde l'indicazione 'Nome squadra', il secondo errore è che la classifica è stata stampata al contrario, per cui il Liceo 'Scoglio' è in realtà arrivato ultimo, il Liceo 'Boskov' è arrivato penultimo, e così via. Determinare in quale posizione si è piazzato veramente il Liceo 'Rosolini'.

3. Dobbiamo distinguere due cose importanti: dove la squadra si è posizionata e il numero a lei affiancato che non coincide con la reale posizione. Il liceo Scoglio è arrivato ultimo, quindi in posizione $9999 = 10000 - 1$, ma risulta al numero $2 = 1 + 1$ nella griglia; il liceo Boskov è arrivato in posizione $9998 = 10000 - 2$, ma risulta al numero $3 = 1 + 2$ nella griglia, e così via. Quindi il liceo Rosolini è al numero $4003 = 1 + 4002$ nella griglia, ma è arrivato in posizione $10000 - 4002 = 5998$.

4. Il cucù impazzito Nello studio del Rettore dell'Università di Genova vi è un antico orologio a cucù. Purtroppo negli ultimi tempi il meccanismo si è guastato, ed invece di annunciare le ore, l'orologio emette un "cucù!" tutte le volte che la lancetta dei secondi e quella dei minuti sono perpendicolari tra di loro (la lancetta dei secondi si muove in modo continuo e non a scatti). Determinare quanti "cucù!" emette l'orologio nell'arco di 24 ore.

4. In un'ora, la lancetta dei minuti si trova in posizione perpendicolare alla lancetta dei secondi per 2 volte ogni minuto, tranne durante il 14^o e il 44^o minuto, durante i quali si verifica un unico caso favorevole, perchè scatta il minuto successivo (15 e 45 rispettivamente). Quindi, in 24 ore ci sono

$$[(60 \cdot 2) - 2] \cdot 24 = 2823$$

posizioni perpendicolari delle due lancette.

5. Ma quanto ci guadagna? Un concessionario acquista un'auto usata e la rivende ad un prezzo maggiorato. I due prezzi di acquisto e rivendita sono numeri interi di euro, di quattro cifre ciascuno, per scrivere i quali si usano una ed una sola volta tutte le cifre da 1 ad 8. Determinare quanti euro guadagna, come minimo, il concessionario.

6. Strane coincidenze all'anagrafe Esaminando i dati dell'anagrafe di Genova, relativi agli anni dal 1900 al 2002, sono emerse alcune singolari coincidenze. Innanzitutto, comunque si scelga un periodo di quattro anni consecutivi, la somma del numero dei bambini nati in quei quattro anni è sempre la stessa. Inoltre nel 1923 sono nati 3291 bambini, e nel 1977 ne sono nati 7791. Determinare quanti bambini sono nati nel 2001.

7. Lavorate, gente, lavorate! Visto il pessimo livello della classe, un'insegnante ha riempito i suoi studenti di esercizi per le vacanze. Damiano, Giovanni e Michele hanno allora deciso di lavorare sodo nei primi giorni, in modo da avere poi l'estate libera. Damiano ha quindi svolto il primo giorno 1/6 degli esercizi, e poi il secondo giorno ne ha svolti addirittura 100. Giovanni ha invece fatto metà degli esercizi il primo giorno, ma solo 9 il secondo. Michele, infine, ha fatto il primo giorno 1/4 degli esercizi assegnati, mentre il secondo giorno ne ha fatti 79. Sapendo che nei primi due giorni Damiano ha fatto meno esercizi di Giovanni, il quale a sua volta ha fatto meno esercizi di Michele, e che tutti e tre i ragazzi hanno svolto, ogni giorno, un numero intero di esercizi, determinare quanti esercizi sono stati assegnati per le vacanze.

5. Per ottenere un minimo guadagno che verifica le condizioni del problema, i due numeri di 4 cifre sono tali che le cifre delle migliaia si discostino di 1; poi sulle centinaia, decine ed unità le cifre minori (da 1 crescendo) compongono il prezzo di rivendita, quelle maggiori (da 8 decrescendo) il prezzo di acquisto. Risultano così i valori $5123 - 4876 = 247$.

6. Sappiamo che la somma dei bambini nati in quattro anni consecutivi è costante. Allora si ha che le somme

$$\begin{array}{rl} [\text{bambini anno } x]+ & [\text{bambini anno } x+1]+ \\ [\text{bambini anno } (x+1)]+ & [\text{bambini anno } x+2]+ \\ [\text{bambini anno } (x+2)]+ & [\text{bambini anno } x+3]+ \\ [\text{bambini anno } x+3] & [\text{bambini anno } x+4] \end{array}$$

sono uguali.
Perciò (bambini anno x) = (bambini anno $x+4$): ogni quattro anni nascono lo stesso numero di bambini. Poichè $2001 = 1977 + 4 \cdot 6$, i bambini nati nel 2001 sono tanti quanti quelli nati nel 1977: 7791.

7. Sia x il numero di esercizi da svolgere. Dal testo deduciamo che

$$\frac{1}{6} \cdot x + 100 < \frac{1}{2} \cdot x + 9 < \frac{1}{4} \cdot x + 79$$

Svolgendo i calcoli si trova che x deve essere compreso tra 267 e 280. Tra questi numeri bisogna trovare un numero divisibile per 4 e 6 (dunque anche per 2), cioè un multiplo di 12. L'unico è 276.

8. La torta della vittoria Per festeggiare la vittoria della propria scuola in questa gara, gli insegnanti dell'istituto hanno deciso di offrire ai propri allievi una grande torta. Cercando di indovinare quanti grammi pesa la torta, i sette concorrenti hanno detto, rispettivamente, 5040, 5060, 5110, 5120, 5150, 5170, 5180. Nessuno ha centrato il peso esatto, e la somma di tutti gli errori (contati sempre con il segno positivo) è di 300 grammi. Determinare quanti grammi pesa la torta.

9. Ma quanto costa pulire il "Matitone"! Il "Matitone" è il sesto grattacielo più alto d'Italia e si trova a Genova. Esso è formato da un prisma retto a base ottagonale sormontato da una piramide retta a base ottagonale coincidente con la base superiore del prisma. Un'impresa di pulizie viene incaricata di pulire la superficie esterna del Matitone. Un operaio misura allora che la lunghezza di una corda tesa che parte dalla punta del grattacielo, passa per la metà di un lato dell'ottagono ed arriva fino a terra, è di 120 metri. Successivamente misura l'altezza del prisma ed il lato dell'ottagono, che risultano essere, rispettivamente, 90 metri e 20 metri. Sapendo che l'impresa richiede mezzo euro per ogni metro quadrato da pulire, determinare quanti euro costerà la pulizia dell'intera superficie del grattacielo.

8. Notiamo che il peso della torta è compreso tra i tentativi minimo e massimo: infatti $0+20+70+80+110+130+140 = 550$. Dunque, se il peso della torta supera il valore 5040 di p, bisogna trovare un valore di p tale che la somma $p+|p-20|+|p-70|+|p-80|+|p-110|+|p-130|+|p-140| = 300$. Il modo migliore è quello di provare le varie posizioni che può avere p: tra 0 e 20, tra 20 e 70, e via di seguito. Si trovano $p = 70$ e $p = 90$, perciò il peso può essere 5110 o 5130, ma nessun dei ragazzi aveva indovinato. Perciò la risposta è 5130.

9. L'altezza di una faccia triangolare della piramide è $120 - 90 = 30$ metri. Allora la superficie da pulire è $8[\frac{30 \cdot 20}{2} + 20 \cdot 90]\text{m}^2 = 8(300 + 1800)\text{m}^2 = 16800\text{m}^2$. L'impresa di pulizia guadagna 8400 euro.

10. La regata Le quattro province liguri hanno deciso di sfidarsi in una regata velica. Ad un certo punto della telecronaca, la grafica computerizzata mostra dall'alto la posizione delle quattro barche. Uno spettatore, dallo spiccato spirito matematico, osserva immediatamente che la barca di Savona si trova nel punto medio tra la barca di La Spezia e quella di Imperia, e che il triangolo formato da Genova, Savona, La Spezia e quello formato da Genova, Savona e Imperia sono entrambi isosceli. Sapendo che la distanza tra le barche di Genova e La Spezia è di 110 metri, mentre la distanza tra le barche di Genova ed Imperia è di 96 metri, determinare la distanza tra le barche di Genova e Savona.

10. Utilizzando le iniziali dei nomi delle città per le posizioni delle quattro barche, si vede che, dato che $LS = SI$, l'unico modo in cui i due triangoli LSG e GSI siano isosceli è che $LS = GS$ e $GS = SI$. Così la somma delle due coppie di angoli uguali è 360° meno i due angoli nel vertice S dei triangoli isosceli: la somma di questi due è 180°. Perciò la somma dei due angoli in G è $\left(\frac{180}{2}\right)^\circ$. La lunghezza di $GS = SI = \frac{LI}{2} = \sqrt{55^2 + 48^2} = 73$.

11. Il batterio fecondo Nei laboratori biotecnologici dell'Università di Genova si vuole studiare un pericoloso tipo di batteri, con la particolarità che dopo un tempo fisso ogni batterio si divide in tre! Poiché all'inizio vi è un unico esemplare, un ricercatore decide di metterlo in una coltura ed aspettare che si riproduca un numero sufficiente di volte. Dopo un certo periodo, il ricercatore riesamina la coltura e conta il numero di batteri, che però è ancora insufficiente per condurre gli studi. Passato un altro po' di tempo, il ricercatore riconta i batteri e nota che ora ce ne sono 2106 in più rispetto al conteggio precedente. Determinare quanti batteri ci sono nella coltura al secondo conteggio.

11. Ad ogni riproduzione il numero di batteri cresce del triplo del numero precedente. Iniziando con un esemplare, la successione di crescita è

$$1 \quad 3 \quad 3^2 \quad 3^3 \quad 3^4 \quad \dots$$

L'aumento di esemplari dallo stadio n allo stadio m è $3^m - 3^n = 3^n(3^{m-n} - 1)$. Visto che $2106 = 26 \cdot 3^4$, al primo conteggio c'erano 81 esemplari, al secondo conteggio ce n'erano allora $81 + 2106 = 2187$.

12. Sorvegliato speciale Un bambino, accompagnato dai genitori e da un nonno, vuole giocare in una piazza quadrata di 100 metri di lato. Conoscendo le sue precoci abilità matematiche, per controllarlo meglio i tre adulti si piazzano in tre vertici distinti della piazza e dicono al bambino che può scorrazzare liberamente per la piazza, purché in ogni istante il quadrilatero che ha loro quattro come vertici abbia un'area minore od uguale di un quarto dell'area della piazza. Determinare quanti metri quadrati ha a disposizione il bambino.

12. Siano A, B e C i tre vertici dove sono i tre adulti (AC è una diagonale della piazza), sia D la posizione del bambino; consideriamo i due triangoli ABD e BCD la cui unione forma il quadrilatero da considerare, siano x e y le altezze relative alle basi AB e BC, rispettivamente. La somma delle aree dei due triangoli è $\frac{1}{2}100 \cdot (x+y)$ che deve essere al massimo 2500, cioè $x + y \leq 50$. La zona disponibile è il triangolo isoscele rettangolo in B con cateto di 50m. L'area è 1250.

13. I codici divisibili Per ricordare il codice del suo VideoBank, Giovanni ha notato che si tratta di un numero di quattro cifre distinte, tutte diverse da 0 e da 1, e che è divisibile per tutte queste quattro cifre. Inoltre, si tratta del più grande numero di quattro cifre con questa proprietà. Curiosamente, il numero del VideoBank di Damiano ha la stessa proprietà di quello di Giovanni, soltanto che è il più piccolo numero di quattro cifre ad averla. Determinare la differenza tra il codice di Giovanni e quello di Damiano.

13. Cerchiamo il numero massimo scrivibile con quattro cifre del tipo $9abc$ tutte distinte. Per essere del tipo $98bc$, bc deve essere divisibile per 8, dato che $9800/8 = 1225$. Inoltre, $8 + b + c$ deve essere divisibile per 9. La scelta $b = 7$ e $c = 2$ produce un numero non divisibile per 9; $b = 6$ e $c = 4$, sì. Cerchiamo ora il minimo numero scrivibile con quattro cifre distinte, proviamo con il tipo $23de$: $100 - de$ deve essere divisibile per 6 dato che $2400 = 6 \cdot 400$. 2346 non è divisibile per 4, 2364 sì. La risposta è $9864 - 2364 = 7500$.

14. Il pentagono di gara In futuro si prevede di aumentare notevolmente il numero di squadre invitate a questa gara. Per questo motivo l'Università ha previsto la costruzione di un apposito palazzetto pentagonale. Il progetto prevede che due lati consecutivi siano lunghi 100 metri, e che gli altri tre lati siano lunghi 50 metri e formino tra di loro due angoli di 120 gradi. Determinare, in metri quadrati, l'area del nuovo palazzetto.

14. Sia $ABCDE$ il pentagono, $AB = AE = 100$ e $BC = CD = DE = 50$. Sia poi H il punto di intersezione tra EB e la perpendicolare a EB passante per D, J il punto di intersezione tra EB e la perpendicolare a EB passante per A,K il punto di intersezione tra EB e la perpendicolare a EB passante per C. Per questioni di simmetria, il quadrilatero $BCDE$ è isoscele con angoli alla base di 60°. La semidifferenza delle basi è 25m. La base è dunque 100m, così che il triangolo che completa il pentagono è equilatero. La sua area è $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 100^2$ mentre l'area del trapezio è $\frac{\sqrt{3}}{4}50(50+100)$. L'area del pentagono è dunque $[50(50 + 100) + 100^2]\frac{\sqrt{3}}{4} = 7577$.

15. Le bandiere casuali Una bandiera della Sampdoria è costituita da sei strisce orizzontali colorate, dall'alto in basso, di blu, bianco, rosso, nero, bianco e blu. Una fabbrica produce bandiere della Sampdoria, ma a causa di un errore le macchine, dopo aver selezionato due strisce blu, due strisce bianche, una rossa e una nera, cuciono a caso le sei strisce di stoffa una di seguito all'altra, e poi attaccano il tutto all'asta in modo che le striscie siano orizzontali. Dopo che sono state confezionate 14400 bandiere con questo metodo, un operaio si accorge dell'errore e ferma la produzione. Determinare quante bandiere con il giusto ordine dei colori saranno state confezionate mediamente fino a quel momento.

15. Gli ordini delle strisce sono $6! = 720$. Ne vanno bene quattro: infatti, due strisce sono bianche e possono andare in due posti giusti, due strisce sono blu e pure possono andare in due posti giusti. le bandiere stampate correttamente sono $\frac{14400}{720} \cdot 4 = 80$.

16. Soldi contati In piazza della Vittoria vogliono costruire un piccolo parco a forma di settore circolare, circondato da una cancellata artistica in ferro battuto, sia sui due raggi, sia sull'arco. Visto il budget ridotto, la cancellata non potrà essere più lunga di 300 metri. Determinare, in metri quadrati, quanto potrà essere, al massimo, la superficie del parco.

16. Sia θ l'angolo del settore circolare. La lunghezza della cancellata è $\theta r + 2r$; per non superare i 300m deve essere quindi $\theta = \frac{300-2r}{r}$. Allora l'area è $\frac{1}{2}\theta \cdot r^2 = (150 - r) \cdot r$. Il massimo è per $r = 75$: 5625.

17. Domeniche a piedi In una domenica pomeriggio in cui nel centro di Genova è vietata la circolazione delle auto, una gran folla passeggia per via XX Settembre. Per stimare quante persone ci sono nella via in un certo istante, Gianmarco traccia un'ideale linea retta perpendicolare alla via e conta che in un minuto questa linea viene attraversata, in un verso o nell'altro, da 150 persone. Sapendo che via XX settembre è lunga 816 metri, e supponendo che il flusso di persone sia costante e che tutti passeggino parallelamente alla via alla velocità di un metro al secondo, determinare il numero di persone contemporaneamente presenti in via XX Settembre.

17. Calcoliamo quante persone sono in una striscia di 60 metri su via XX settembre, delimitata da due ideali linee rette: una a est, una a ovest. Un certo numero di persone entra nella striscia passando la linea a est, un altro numero di persone passa la linea a ovest. La somma delle persone che camminano nelle due direzioni è la stessa di quella che passa sotto la singola linea ideale tracciata da Gianmarco: 150 persone occupano 60 metri di via XX settembre. Di conseguenza, sulla via vi sono contemporaneamente $150 \cdot \frac{816}{60} = 2040$ persone.

18. L'acquario All'acquario di Genova ci sono 47 vasche, ciascuna con un numero diverso di pesci al suo interno. Il numero di pesci contenuti nelle varie vasche aumenta costantemente dalla vasca numero 1 alla vasca numero 47 (cioè la differenza tra il numero di pesci contenuti in una vasca e nella vasca precedente è sempre la stessa). Sapendo che nelle vasche con il numero dispari ci sono in tutto 3336 pesci, determinare quanti pesci ci sono in totale all'acquario di Genova.

19. Fantacalcio? In una rivista enigmistica ligure è comparsa la seguente espressione algebrica

`GENOA + SAMP = SERIE - A`

in cui lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse. Inoltre nessun numero inizia con una cifra zero. Determinare il massimo valore che può assumere SAMP.

20. Operazione "Stadi sicuri" Ad una trasferta vorrebbero partecipare 2003 tifosi. Alcuni di questi sono pacifici e dicono sempre la verità, altri purtroppo sono violenti e mentono sempre. Ogni tifoso ne conosce almeno un altro. Tutti i 2003 tifosi hanno una home page, nella quale tutti, nei giorni che precedono la trasferta, scrivono la frase "il numero dei tifosi violenti che conosco è strettamente maggiore del numero dei tifosi pacifici che conosco". Preoccupate dalla situazione, le autorità della città in cui dovrebbe svolgersi la partita fanno arrestare un tifoso sospetto, impedendogli di partecipare alla trasferta. A questo punto tutti i 2002 rimasti scrivono nella loro homepage "tra i tifosi rimasti, il numero dei violenti che conosco è strettamente minore del numero dei pacifici che conosco", ed i 2002 possono partire indisturbati. Determinare quanti tifosi violenti volevano all'inizio partecipare alla trasferta.
Si assuma che la conoscenza sia simmetrica (cioè se A conosce B, allora B conosce A); si assuma inoltre che nessun tifoso includa se stesso tra le persone che conosce.

21. Il veggente Per conoscere in anticipo il vincitore di questa gara a squadre, un indovino ha ordinato una sfera di cristallo di 40 centimetri di raggio. La sfera è stata trasportata in una scatola cubica di un metro di lato. Data la fragilità dell'oggetto, la sfera era tenuta ferma, all'interno della scatola, da otto sferette di gomma, uguali tra di loro e poste in corrispondenza dei vertici del cubo in modo da impedire ogni movimento della sfera di cristallo. Determinare, in millimetri, il raggio delle sfere di gomma usate per l'imballaggio.

22. La speranza è l'ultima a morire... Al termine di un finalmente esaltante campionato di serie B, Genoa e Sampdoria concludono con lo stesso punteggio in testa alla classifica. Dalle statistiche, risulta che le due squadre hanno ottenuto il loro punteggio in due modi diversi (hanno cioè totalizzato un numero diverso sia di vittorie, sia di pareggi, sia di sconfitte) ed inoltre questi erano gli unici due modi per ottenere tale punteggio. Sapendo che i due derby sono finiti in parità e che entrambe le squadre hanno perso nella difficile trasferta di Livorno, determinare con quanti punti Genoa e Sampdoria hanno vinto il campionato.
Si assuma che il campionato si svolga ancora secondo le regole attuali, cioè con 20 squadre che si affrontano a due a due in partite di andata ritorno, in cui vengono assegnati 3 punti per la vittoria, 1 punto per il pareggio e 0 punti per la sconfitta.

18. Sia k l'aumento di pesci tra una vasca e la successiva. Tra una vasca e quella dopo la successiva, l'aumento è $2k$. Non sappiamo il numero di pesci nella prima vasca:, indichiamo quel numero con p. Allora il numero di pesci nelle vasche dispari è $p+(p+2k)+(p+4k)+\ldots+(p+46k) = 24p+2k\cdot(0+1+2+\ldots+23) = 24p+2k\cdot\left(\frac{1}{2}24\cdot 23\right) = 24(p+23k)$. Visto che questo è 3336, troviamo che $3336 = 24\cdot(p+23k)$, così $139 = p+23k$. Si possono trovare i possibili 6 valori di p e k, ma conviene notare che, nelle vasche pari, il numero di pesci è $(p+k)+(p+3k)+\ldots+(p+45k) = 23(p+k)+2k\cdot(0+1+2+\ldots+22) = 23(p+k)+2k\cdot\left(\frac{1}{2}22\cdot 23\right) = 23[(p+k)+22k] = 23(p+23k) = 23\cdot 139$. Pertanto, il numero totale di pesci è $3336+23\cdot 139 = 3336+3197 = 6533$.

19. Sappiamo che lettere diverse corrispondono a numeri diversi. Dall'uguaglianza, si vede che $\mathtt{G}$ è la cifra che precede $\mathtt{S}$. Proviamo con la scelta massima concessa: $\mathtt{S}=9$, $\mathtt{A}=7$ e $\mathtt{M}=6$. Così $8\mathtt{ENO}7+976\mathtt{P} = 9\mathtt{ERIE}-7$. Perciò $7+\mathtt{P} = 1\mathtt{E}-7$ per cifre $\mathtt{P}$ e $\mathtt{E}$ inferiori a 6. Il valore massimo per $\mathtt{E}$ è 5; dunque il valore massimo per $\mathtt{P}$ è 1. Queste scelte sono compatibili con l'uguaglianza: $85\mathtt{NO}7+9761 = 95\mathtt{RI}5-7$ è corretta per $\mathtt{N}=4$, $\mathtt{O}=3$, $\mathtt{R}=2$ e $\mathtt{I}=0$.

20. I tifosi non possono dire tutti il vero, perchè in quel caso ci sarebbe almeno un tifoso violento (che i pacifici devono conoscere). C'è dunque un tifoso violento che conosce qualcuno. Dunque c'è almeno un tifoso pacifico.
Eliminando un tifoso conosciuto, ogni tifoso pacifico può modificare l'affermazione del giorno seguente al massimo come "il numero dei tifosi violenti che conosco è minore od uguale del numero dei pacifici che conosco". Vista l'affermazione che viene fatta, tutti i tifosi rimasti sono violenti.

21. Sia r il raggio di una sferetta di gomma. La sfera di cristallo viene trattenuta dalle sferette di gomma equidistante dai vertici del cubo formato dai centri delle sferette. La lunghezza in decimetri del lato di questo cubo è $10-2r$. La diagonale del cubo si calcola in due modi: $\sqrt{3}(10-2r) = 8+2r$. Si ricava $r = \frac{19-9\sqrt{3}}{2} \approx 1.705$. La risposta è 170.

22. Il punteggio in classifica è stato ottenuto come somma $3\cdot a+1\cdot b+0\cdot c$ con $a+b+c=38$: a è il numero di vittorie, b dei pareggi e c delle sconfitte, così $c\geq 1$ e $b\geq 2$. Si deve trovare il punteggio più alto ottenibile in due modi diversi. Il valore massimo per a, prendendo b e c minimi, è 35. Ma il punteggio corrispondente di 107 si ottiene, ovviamente, in un unico modo. Il primo caso possibile di due scritture è per $a=34$, $b=2$, $c=4$: il punteggio è 104. Si ottiene anche con $a=33$, $b=5$, $c=0$, ma c deve essere almeno 1. Perciò, il caso possibile successivo è $a=33$, $b=2$, $c=3$ con punteggio 101 che si ottiene anche con $a=32$, $b=5$, $c=1$.

23. Il crucinumero Quest'anno Michele ha trovato, su un vecchio libro di problemi di matematica, un crucinumero: si tratta di una specie di cruciverba, costituito da uno schema 4×4 con un'unica casella nera posta nella terza casella della prima riga. Le 15 caselle bianche devono essere riempite con delle cifre, in modo che i numeri che si leggono nelle varie righe e colonne non inizino mai con uno zero e rispettino le definizioni qui sotto riportate.

- *Prima riga* (prime due caselle): ha esattamente 12 divisori positivi (compresi 1 e se stesso).
- *Seconda riga*: il più piccolo intero positivo che si può scrivere come somma di due cubi perfetti positivi in due modi distinti.
- *Terza riga*: un multiplo di 13.
- *Quarta riga*: un numero primo.
- *Prima colonna*: una potenza di due.
- *Seconda colonna*: è divisibile per 102.
- *Terza colonna*: il più grande numero primo minore di 300.

Purtroppo l'ultima definizione, corrispondente alla quarta colonna, è stata rosicchiata dalle tarme, ma Michele, dopo aver risolto il resto del crucinumero, si rende conto di poter scrivere sull'ultima colonna il proprio anno di nascita senza che questo sia in contraddizione con le altre definizioni. Determinare l'anno di nascita di Michele.

24. Alberi fruttiferi Tutti gli alberi nel giardino di Villa Pallavicini hanno alcune strane caratteristiche. Innanzitutto sono tutti formati da 2003 rami; inoltre ogni ramo o si biforca in altri due rami, o termina con un frutto o termina con due frutti; tutti gli alberi, infine, hanno un solo tronco (da considerarsi come un ramo). Determinare la somma del massimo e del minimo numero di frutti che può avere un albero di questo giardino.

23. La soluzione del crucinumero è

8	4	■	1
1	7	2	9
9	9	9	7
2	4	3	7

Si comincia con il numero somma di due cubi perfetti di numeri positivi $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ e il massimo numero primo minore di 300. La potenza di due di quattro cifre deve essere 8192 visto la cifra delle centinaia. Il numero tra 80 e 89 con 12 divisori è 84. Il multiplo di 102 di quattro cifre compreso tra 4700 e 4799 è $4794 = 47 \cdot 102$. Il multiplo di 13 compreso tra 9990 e 9999 è $9997 = 769 \cdot 13$. Il numero primo compreso tra 2341 e 2349 è 2347 perchè 2341 è divisibile per 11 e 2349 è divisibile per 3. La data di nascita di Michele è quindi 1977.

24. A parte il primo ramo—il tronco—, ogni biforcazione serve o per l'innesto di un altro ramo o per terminare. Oltre al tronco, ci sono 2002 rami, cioè 1001 biforcazioni che occupano dunque altrettanti rami, incluso il tronco. Restano 1002 terminazioni per frutti. Il massimo numero è 2004, il minimo è 1002. La risposta è 3006.