

## Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale  $x$  è il più grande intero minore od uguale ad  $x$ .
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad \sqrt{7} = 2,6458 \quad \pi = 3,1416.$$

11 Marzo 2011

## Gara a Squadre – Testi dei problemi

### 1. Bunsceroli onesti e disonesti

James Bond è in azione sull'isola di Bunscerol nella Guyana Francese, abitata soltanto da 2011 membri della SPECTRE. Per sua fortuna, ogni bunscerolo (=abitante su Bunscerol) ha la caratteristica di dire sempre il vero o di dire sempre il falso. Sente un guardiano mormorare: «I busceroli che dicono il vero sono tanti quanti i bunsceroli che dicono il falso». Quanti sono al massimo coloro che dicono sempre il vero?

### 2. Il primo grattacielo

Un grattacielo è a forma cilindrica con base di perimetro 150 m, le pareti alte 160 m, il tetto a forma conica con la stessa base del cilindro e alto 20 m. Grazie a ventose che gli permettono di muoversi in qualunque direzione sulla superficie liscia del palazzo, 007 sta scalando il grattacielo per posizionare tre bombe esattamente 30 m sotto la grondaia alla base del tetto e alla stessa distanza una dall'altra. Ha appena fissato la seconda e deve andare nel punto dove fissare la terza. Qual è la lunghezza in metri della distanza minima che deve percorrere?

### 3. Un edificio strano

James Bond ha davanti un disegno che mostra un triangolo con i tre vertici marcati  $A$ ,  $B$  e  $C$ ; vede segnata poi una parallela al lato  $AC$  che interseca  $BC$  in  $M$  e  $AB$  in  $P$ . Infine, è stata tracciata una parallela a  $BC$  che interseca  $AB$  nel suo punto medio  $D$ ,  $PM$  in  $E$  e  $AC$  in  $F$ . Senza strumenti di misurazione, James riesce solo a determinare che il rapporto  $\frac{MB}{MC}$  è 10. Per avere un'idea di che tipo di edificio sia rappresentato nel disegno, James determina il rapporto tra l'area del triangolo  $PDE$  e quella del quadrilatero  $PAFE$ . Quanto vale mille volte il rapporto calcolato da James?

### 4. Le due radure

Due radure, una quadrata, l'altra a forma di triangolo equilatero, hanno lo stesso perimetro. La SPECTRE vuole renderle circolari e il lavoro viene fatto estendendole il meno possibile. Qual è il rapporto tra l'area circolare più piccola e l'area circolare più grande?

Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola.

### 5. Passatempi galeotti

James Bond è stato imprigionato dai bunsceroli. Per passare il tempo fa la somma dei quadrati perfetti (cioè numeri che sono quadrati di numeri interi positivi) della forma  $\frac{n}{4000 - n}$  per  $n$  intero. Che risultato trova?

## 6. Un gioco di tre dadi

Dr. No sfida Bond a un gioco con tre dadi: uno con 4 facce numerate da 1 a 4, uno con 6 facce numerate da 1 a 6 e l'ultimo dado con 8 facce numerate da 1 a 8. Bond deve tirare tutti i dadi due volte e sommarne le facce. Potrà lasciare l'isola se il risultato che ottiene è uguale a 14, altrimenti verrà gettato in prigione. James tira una volta tutti e tre i dadi insieme, ottenendo 5 come somma dei numeri sulle facce. Qual è la probabilità di Bond di non venir gettato in prigione?

Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

## 7. Al sole

Coricati al sole sulla spiaggia dell'isola di Bunscerol, 007 intrattiene Honey parlandole dei polinomi celebri. I polinomi celebri sono quei polinomi  $P(x)$  di grado al massimo 11, che si ottengono sommando alcune potenze distinte della variabile  $x$  e tali che  $P(1) = 5$  e  $P(-1) = 1$ . Ad esempio,  $x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$  è celebre mentre  $x^2 + x + 1$  e  $2x^2 + 2x + 1$  non sono celebri. James si gira verso Honey e le chiede con voce suadente quanti sono i polinomi celebri che, calcolati in 2, danno valori maggiori di 2011. Che cosa risponde Honey da brava matematica?

## 8. Apro o non apro?

L'edificio centrale ha moltissime porte d'accesso, ma quasi tutte sono protette da esplosivo. 007 ha scoperto che le uniche porte che non sono protette da esplosivo sono quelle marcate con un numero  $k$  (intero positivo) tale che  $2011+k$  divide  $2011 + k^2$ . James determina velocemente tutti tali  $k$ .

Rispondere con la somma di tutte le loro cifre.

## 9. Il lanciarazzi mal funzionante

Per attivare il lanciarazzi dell'auto di 007, si deve premere il pulsante di rilascio due volte (la prima volta per togliere la sicura). James sta cercando di attivare il lanciarazzi, ma il pulsante è danneggiato: non solo il pulsante funziona con probabilità  $\frac{3}{4}$ , ma è anche necessario che il pulsante funzioni due volte di seguito per riuscire ad attivare l'arma perché la sicura è danneggiata e, se si preme il pulsante e quello non funziona, la sicura si riattiva.

Qual è la probabilità che l'arma si attivi esattamente alla quinta pressione del pulsante?

Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

## 10. L'inseguimento

E' notte. Emilio Largo e i suoi scagnozzi stanno inseguendo 007 con una jeep che monta un proiettore a 3 metri dal terreno per illuminare i dintorni. James si nasconde dietro a una strana lastra verticale alta 2 m. Il proiettore della jeep illumina la lastra formando a terra un'ombra quadrata. James, con molta freddezza, valuta l'area dell'ombra in  $64 \text{ m}^2$  e determina la distanza della jeep dalla lastra. Si rende conto che è anche in grado di calcolare l'area della lastra. Quanto misura l'area della lastra in  $\text{dm}^2$ ?

### 11. La roulette a 36 numeri

Emilio Largo ha catturato James Bond e, con gusto sadico, lo sfida ad una strana roulette. Ci sono trentasei scatole numerate da 1 a 36 e trentasei palline numerate da 1 a 36, Largo introduce a caso in ciascuna scatola una pallina. Bond dovrà aprire una scatola, guardare il numero della pallina, aprire la scatola con quel numero, e continuare. Smette quando trova una pallina con il numero di una scatola già aperta. Se apre meno di tredici scatole, verrà gettato nella vasca degli squali. James calcola rapidamente la probabilità che ha di scampare, fa un ghigno beffardo e apre la scatola numero 5. Qual è la probabilità che ha calcolato?

Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

### 12. I calzini di James Bond

Miss Money Penny ha conservato in un cassetto i calzini che James Bond le lasciava per ricordo prima di partire: gli spiega che ci sono 2 calzini di un colore, 4 calzini di un altro colore, 6 calzini di un terzo, e così via; insomma, per un'appropriata numerazione dei colori dei calzini da 1 a  $n$ , ci sono  $2i$  calzini dell' $i$ -esimo colore. James ha calcolato che, prendendo a caso 79 calzini, è certo di avere 4 calzini di colori diversi, ma, prendendone 78 a caso, potrebbe non riuscirci.

Qual è il minimo numero di estrazioni casuali necessarie per essere certo di avere 6 calzini dello stesso colore?

### 13. Il laser da sabotare

Mentre sorseggiava un vodka martini, shakerato, non mescolato, James Bond aveva notato la scrittura della formula del rapporto conico del laser

$$r = \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} + \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$$

lasciata imprudentemente vicino alle olive. In seguito, aveva scoperto che il rapporto di potenza del laser deve essere  $r^3 - 9r + 2011$ . Ora, per poter sabotare efficacemente il laser, deve calcolare esattamente il valore del rapporto di potenza. Che numero calcola James?

### 14. Il campo della SPECTRE

La SPECTRE ha costruito un recinto triangolare per delimitare un campo. All'interno del campo c'è una piscina triangolare con lati di 70 m, 90 m e 110 m. Tre vialetti rettilinei collegano i vertici del recinto con quelli della piscina: ogni vialetto prolunga un lato diverso della piscina. James Bond sta facendo un sopralluogo e decide che quel campo non può essere usato come base missilistica. Sapendo che ogni vialetto è lungo quanto il lato della piscina che prolunga, determinare il rapporto tra l'area del terreno occupato dalla piscina e il restante. Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

### 15. Il codice di ingresso

James ha scoperto che il codice di ingresso alla base è un numero di quattro cifre, divisibile per 7 e tale che il numero ottenuto scrivendo le cifre alla rovescia è maggiore del numero originale, ma pure divisibile per 7. In più entrambi i numeri hanno lo stesso resto nella divisione con 37; infine il codice è il più grande con queste proprietà.

Qual è il codice di ingresso?

### 16. Il secondo grattacielo

Nella stessa zona del grattacielo cilindrico c'è un altro grattacielo composto da un prisma e una piramide. Il prisma ha come base un pentagono regolare: il perimetro di base è 600 m, le pareti laterali sono alte 240 m. La piramide, che funge da tetto, ha la stessa base del prisma e ogni spiovente è un triangolo equilatero. Sempre grazie a ventose che gli permettono di muoversi in qualunque direzione sulla superficie liscia del palazzo, 007 sta scalando il grattacielo per posizionare una bomba su ognuno degli spigoli, esattamente 30 m sotto la grondaia alla base del tetto. James ha posizionato la terza, ma si rende conto di aver sbagliato: ha già fissato una bomba in ciascuno dei due spigoli vicini e ora deve raggiungere uno dopo l'altro i due spigoli più lontani. Qual è la misura in metri della distanza minima che deve percorrere per terminare il lavoro e fissare tutte e cinque le bombe nei punti richiesti?

### 17. I ninja bassi

Davanti ai ninja del servizio segreto giapponese, James Bond, agente del SIS (Secret Intelligence Service), non riesce a trattenere una battuta: «Siete più bassi degli agenti nel SIS». Colpito nell'orgoglio, Tiger, il capo dei ninja, gli chiede: «Che cosa intendi dire? Vuoi dire che

1. Ogni ninja è più basso di ogni agente del SIS?
2. Ogni ninja è più basso di qualche agente del SIS?
3. Si possono allineare i ninja e gli agenti del SIS su due file, una di fronte all'altra, in modo che ogni ninja abbia di fronte un agente del SIS più alto e ogni agente del SIS abbia di fronte un ninja?
4. Il più alto tra gli agenti del SIS è più alto del più alto dei ninja?
5. Il più basso agente del SIS è più alto di un numero di ninja superiore al numero di agenti del SIS più bassi del più alto ninja?
6. L'altezza media dei ninja è minore dell'altezza media degli agenti del SIS?»

James non sa che cosa dire, ma si sforza di determinare tutte le coppie di domande  $(a, b)$  con  $1 \leq a \leq 6$  e  $1 \leq b \leq 6$  tale che la risposta “sì” alla prima comporta la risposta “sì” alla seconda. Quante sono queste coppie?

### 18. La Prova Definitiva

Per diventare capo della SPECTRE, Blofeld deve superare un test durissimo: la Prova Definitiva. La P.D. è un gioco d'azzardo dove un giocatore da solo si confronta con tutti gli altri. Ci sono dieci scatole numerate da 1 a 10 e dieci palline numerate da 1 a 10. Il giocatore da solo introduce, senza guardarle, una pallina in ciascuna scatola. Ora, ciascuno degli altri giocatori, uno dopo l'altro, apre una scatola, guarda il numero della pallina, apre la scatola con quel numero, guarda il numero della pallina in quest'ultima e continua finché trova una pallina con il numero di una scatola già aperta. Ogni giocatore vede le scatole che ha aperto chi ha giocato prima di lui. Il giocatore da solo supera la P.D. se uno degli altri apre più di cinque scatole. Sapendo che gli altri contendenti per il posto di capo della SPECTRE erano proprio cinque, qual è la probabilità che ha Blofeld di superare la P.D.?

Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

### 19. I codici a colori

I codici di segnalazione del SIS utilizzano una tabella di 10 righe per 5 colonne. Un codice è determinato dalla colorazione di tutti i 50 riquadri: ogni riquadro è colorato rosso, blu, giallo o nero, facendo in modo che due riquadri dello stesso colore non abbiano lati o vertici in comune. Determinare quanti codici di segnalazione è possibile generare.

### 20. Il pannello di controllo

James Bond ha davanti un'enorme pannello di controllo con una tastiera numerata di forma quadrata con un numero dispari di tasti su ciascun lato. Su ciascun tasto è scritto un numero intero positivo. James nota subito una stranezza: i numeri sulla tastiera sono disposti a spirale. Sul tasto al centro c'è il numero 1, sul tasto a sinistra di questo c'è il numero 2, sul tasto sotto a quest'ultimo c'è il numero 3, sul tasto a destra di questo il numero 4, e così via, finché il numero più grande compare sul tasto in alto a sinistra.

Per essere certo di memorizzare la situazione, cerca un'altra proprietà per caratterizzare la situazione e si accorge che la disposizione dei numeri è tale che il valore assoluto della differenza fra le somme dei numeri sulle due diagonali è il massimo possibile inferiore a 2011.

Quanti sono i tasti?

### 21. Le basi della SPECTRE

Appena ripescato al largo dell'isola Bunsceol, James Bond informa l'Intelligence di una pianta con le basi della SPECTRE. Traccia un triangolo di vertici SER, sul lato SE indica con P il punto medio. Poi congiunge R con P e traccia le bisettrici dei due angoli in P che non sono piatti, segnando con T e C rispettivamente i punti di incontro di una bisettrice con il segmento SR e dell'altra con il segmento RE. L'Intelligence sa che la distanza tra la base S e la base E è 240 km, la distanza tra la base R e la base S è 100 km e la distanza tra la base P e la base R è 90 km. Sanno anche che il centro operativo della SPECTRE è all'intersezione tra TC e RP. Quanti chilometri dista la base T dal centro operativo?

## 22. A Fort Knox

Vedendo soldati dell'esercito americano che circondano Fort Knox, Bond intima a Goldfinger di arrendersi perché i soldati sono più forti dei suoi mercenari all'interno del fortino. Invece di agire subito, Goldfinger, come ogni cattivo che si rispetti, non perde l'occasione per declamare: «Che cosa intendi dire quando affermi che i soldati sono più forti dei mercenari? Vuoi dire che

1. Ogni soldato è più forte di ogni mercenario?
2. Il soldato più forte è più forte del mercenario più forte?
3. Ogni mercenario è meno forte di qualche soldato?
4. E' possibile far in modo che, contemporaneamente, ciascun mercenario combatta in corpo a corpo contro un soldato che è più forte?
5. Ci sono più soldati di forza superiore a qualche mercenario di quanti sono i mercenari di forza superiore a qualche soldato?»

Per far infuriare Goldfinger, Bond gli fa notare che c'è dipendenza tra le sue domande, spiegando che la domanda  $x$  dipende dalla domanda  $y$  quando una risposta positiva alla domanda  $y$  comporta una risposta positiva alla domanda  $x$ . Per esemplificare quanto sta dicendo e perdere altro tempo, dice a Goldfinger

- quante sono le domande che non dipendono da altre
- quante sono le domande che dipendono esattamente da un'altra domanda
- quante sono le domande che dipendono esattamente da due altre domande
- quante sono le domande che dipendono esattamente da tre altre domande.

Quali sono i quattro numeri che Bond dice a Goldfinger?

Si risponda scrivendoli da sinistra a destra nell'ordine in cui li ha calcolati.

## 23. Il simbolo della SPECTRE

Il simbolo rappresentativo della SPECTRE è il triangolo ottusangolo. Sul palazzo principale dell'isola di Bunscevol, una matrice quadrata di luci presenta un'astrazione del simbolo: 81 luci sono distribuite su 9 righe e 9 colonne, la luce al centro resta sempre accesa, altre due delle rimanenti 80 luci si accendono a caso per pochi secondi, in modo che le tre luci accese formino i vertici di un triangolo ottusangolo senza essere allineate. Quante sono le coppie di luci che si possono accendere?

## 24. La capsula

James deve entrare in una capsula sferica di superficie  $60 \text{ m}^2$ . Sa che l'apertura è costituita da un triangolo sferico con angoli di  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ . Un triangolo sferico è la parte di superficie sferica racchiusa da tre archi di circonferenze massime. James cerca di capire se l'apertura sarà abbastanza ampia per entrare insieme con Honey. Qual è l'area del triangolo sferico misurata in  $\text{dm}^2$ ?