Soluzioni per la Coppa Fermat 2011

Soluzione del problema 1. L'affermazione è sicuramente falsa. Il guardiano è l'unico di cui essere certi che dica il falso.
La risposta è `2010`.

Soluzione del problema 2. Il percorso sulla faccia laterale è $\dfrac{150\,\mathrm{m}}{3} = 50\,\mathrm{m}$, un percorso che passa sul tetto è più lungo di $2 \cdot 30\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$.
La risposta è `0050`.

Soluzione del problema 3. Siano $n = \frac{MB}{MC} = 10$ e $k = \frac{BC}{DF} = 2$. Dunque

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MC}{MB + MC} = \frac{1}{n+1}.$$

Dato che $EF = MC$ come lati opposti nel parallelogrammo $EFCM$,

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DF - EF}{DF} = 1 - \frac{k \cdot MC}{BC} = 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Il rapporto tra le aree dei triangoli DEP e DFA è $\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2$ e quello richiesto è

$$\frac{\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2} = \frac{(n+1)^2 - 2k(n+1) + k^2}{2k(n+1) - k^2} = 2025$$

La risposta è `2025`.

Soluzione del problema 4. Sia p il perimetro di entrambi i poligoni. Il lato del quadrato è $\frac{p}{4}$, quello del triangolo è $\frac{p}{3}$. Il raggio della circonferenza circoscritta al quadrato è $\frac{1}{2}\frac{p}{4}\sqrt{2} = \frac{p}{4\sqrt{2}}$, il raggio di quella circoscritta al triangolo è $\frac{2}{3}\frac{p}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p}{3\sqrt{3}}$. Il rapporto richiesto è $\frac{27}{32} = 0,84375$.
La risposta è `8437`.

Soluzione del problema 5. La richiesta $k^2 = \frac{n}{a-n}$ è equivalente alla richiesta $n = \frac{ak^2}{k^2+1}$. Sono i numeri k^2 positivi tali che $k^2 + 1 | a$. Per $a = 4000 = 2^5 \cdot 5^3$, i numeri k sono

k	1	2	3	7
k^2	1	4	9	49

La risposta è `0063`.

Soluzione del problema 6. Tirando i tre dadi, Bond ha già ottenuto 5. Quindi, tirandoli un'altra volta, deve ottenere 9 per vincere. Per avere 9 come somma delle facce dei tre differenti dadi, esistono 21 modi diversi. Dato che i tiri possibili sono $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$, la probabilità di vittoria di Bond è $\frac{21}{192} = 0.109375$.
La risposta è `1093`.

Soluzione del problema 7. Un polinomio del tipo $a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$, con $a_i = 0, 1$, calcolato in 2 è uguale all'espressione decimale del numero binario avente come cifre i coefficienti del polinomio. Sia P un polinomio celebre, tale che $P(1) = 5$ e $P(-1) = 1$. Così $\frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$ è il numero di potenze pari, $\frac{P(1)-P(-1)}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$ il numero di quelle dispari. Considerando il numero binario associato al polinomio se l'undicesima cifra è nulla si verifica che non esistono numeri maggiori di 2011 con tali proprietà. Se l'11-esima cifra è 1 il polinomio assumerà un valore maggiore o uguale a 2048, quindi tutte le combinazioni possibili sono valide: $\binom{6}{3} = 20$ per i pari e $\binom{5}{1} = 5$ per i dispari.
La risposta è `0100`.

Soluzione del problema 8. La condizione $a + k | a + k^2$ è equivalente alla condizione $a + k | a(a + 1)$ dato che $a + k^2 = (a + k)(k - a) + a(a + 1)$. Dunque i numeri richiesti sono tanti quanti i divisori di $a(a + 1)$ maggiori o uguali ad a.
Dato che $a = 2011$ è primo e $2012 = 2^2 \cdot 503$, i valori di k sono $(a + 1) - a = 1$ e $a(d - 1)$ al variare di d tra i divisori di 2012 maggiori di 1: in dettaglio,

$$\begin{aligned} &1 \\ 2011 &= 2011 \cdot (2 - 1) \\ 6033 &= 2011 \cdot (2^2 - 1) \\ 1009522 &= 2011 \cdot (503 - 1) \\ 2021055 &= 2011 \cdot (2 \cdot 503 - 1) \\ 4044121 &= 2011 \cdot (2^2 \cdot 503 - 1) \end{aligned}$$

La somma richiesta è

$$\begin{array}{rr} 1 = & 1\,+ \\ 2+1+1 = & 4\,+ \\ 6+3+3 = & 12\,+ \\ 1+9+5+2+2+2 = & 21\,+ \\ 2+1+5+5 = & 13\,+ \\ 4+4+4+1+2+1 = & 16\,= \\ \hline & 67 \end{array}$$

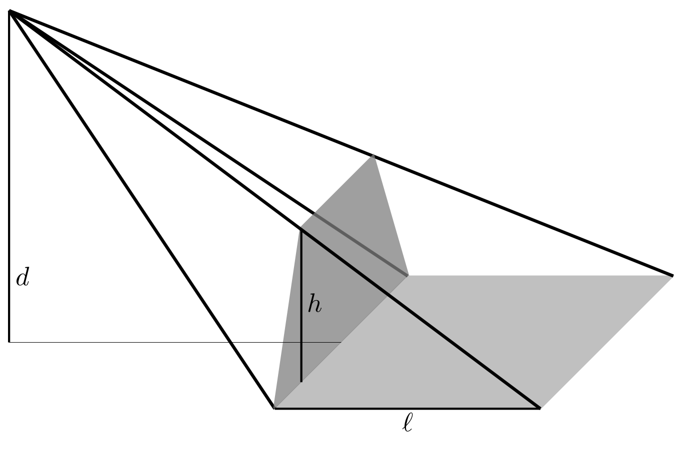
La risposta è `0067`.

Soluzione del problema 9. Sia $p = \frac{3}{4}$ la probabilità di funzionamento del pulsante. La probabilità che il lanciarazzi venga attivato esattamente alla quinta pressione richiede che il pulsante funzioni alla quarta e alla quinta (con probabilità $\Pr_a(p) = p^2$) come pure che non funzioni alla terza (con probabilità $\Pr_b(p) = 1 - p$). Inoltre una delle prime due pressioni non può essere attivante, cioè non deve avvenire che il pulsante funzioni alla prima e alla seconda pressione, che avviene con probabilità $\Pr_c(p) = 1 - p^2$. Perciò la probabilità $\Pr(p)$ che il lanciarazzi venga attivato esattamente alla quinta pressione è

$$\Pr(p) = \Pr_a(p)\Pr_b(p)\Pr_c(p) = p^2(1 - p^2)(1 - p)$$

cioè $\Pr(\frac{3}{4}) = \frac{63}{1024} = 0,0615234375$.
La risposta è `0615`.

Soluzione del problema 10. Siano d l'altezza dal suolo del faro, ℓ il lato del quadrato, h l'altezza della lastra. La situazione è rappresentata in figura



La sezione della piramide con base l'ombra quadrata e vertice il faro è un trapezio (è inessenziale decidere se isoscele o altro). La distanza orizzontale del faro da uno dei vertici più lontani del quadrato è $c = \frac{d}{h}\ell = 12\,\mathrm{m}$. La base superiore del trapezio è $b = \frac{c-\ell}{c}\ell = \ell - \frac{\ell^2}{c}$.
L'area del trapezio è

$$\frac{h}{2}(b + \ell) = \frac{h}{2}\left(2\ell - \frac{\ell^2}{c}\right) = \left(16 - \frac{64}{12}\right)\mathrm{m}^2 = \frac{32}{3}\,\mathrm{m}^2 = 1066,\overline{6}\,\mathrm{dm}^2$$

La risposta è 1066.

Soluzione del problema 11. James deve estrarre la prima pallina diversa dal numero della scatola, lo fa in 35 modi su 36; la seconda pallina (che deve essere un numero diverso dalla prima scatola, non può essere il numero della scatola da cui la sta estraendo) è favorevole a James in 34 casi su 35, e così via. La probabilità che apra almeno 13 scatole è

$$\frac{35}{36} \cdot \frac{34}{35} \cdot \ldots \cdot \frac{36-12}{36-11} = \frac{24}{36} = 0,\overline{6}$$

La risposta è 6666.

Soluzione del problema 12. Per essere sicuro di avere quattro calzini di colori differenti, trattando il peggiore dei casi, bisogna estrarne $2n$ (=numero di calzini dell'n-esimo colore), poi $2n-2$, poi $2n-4$, infine estrarne un altro per avere la certezza di avere estratto almeno quattro calzini di colori differenti. Si ottiene che

$$2n + 2n - 2 + 2n - 4 + 1 = 6n - 5 = 79$$

cioè $n = \frac{79+5}{6} = 14$. Per avere 6 calzini dello stesso colore con certezza, le estrazioni necessarie sono

$$14 + 14 + 13 + 13 + 12 + 1 = 67$$

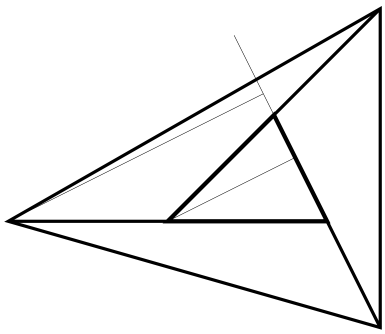
La risposta è 0067.

Soluzione del problema 13. Si utilizza la formula $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

$$\begin{aligned} r^3 - 9r + 2011 &= 8 - \sqrt{37} + 8 + \sqrt{37} + 3(\sqrt[3]{64-37})r - 9r + 2011 \\ &= 16 + 9r - 9r + 2011 = 2027. \end{aligned}$$

La risposta è 2027.

Soluzione del problema 14. Il recinto è diviso in quattro triangoli: la piscina e i tre triangoli con lati uno di quelli esterni, un vialetto completo e, come terzo lato, la parte di vialetto dal vertice della piscina al recinto.



Ciascuno di questi tre triangoli ha un'altezza che è doppia di un'altezza della piscina e che insiste su un lato lungo quanto quello su cui insiste l'altezza di cui è doppia. Perciò l'area di un tale triangolo è doppia dell'area della piscina. Il rapporto è perciò $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$.
La risposta è 1666.

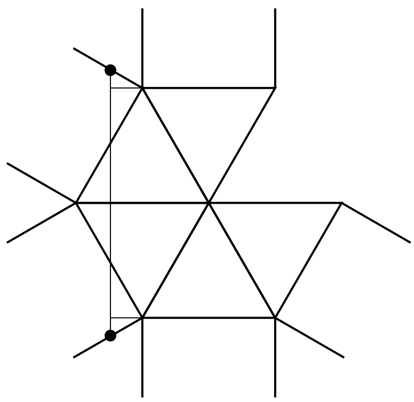
Soluzione del problema 15. Se il numero cercato è $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$, la condizione di ugual resto nella divisione per 37 si riduce a

$$\begin{aligned} (d-a) \cdot 10^3 + (c-b) \cdot 10^2 + (b-c) \cdot 10 + (a-d) \\ &\equiv (d-a) + 26(c-b) + 20(b-c) + (a-d) \\ &\equiv 16(c-b) \equiv 0 \bmod 37 \end{aligned}$$

dato $10^3 \equiv 1 \bmod 37$ e $10^2 \equiv 26 \bmod 37$. Perciò $b = c$.
Il numero cercato diventa $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + b \cdot 10 + d$ e le cifre devono essere tali che $a < d$ e $-a + 5b + d \equiv 0 \bmod 7$, cioè $b \equiv 4(d-a) \bmod 7$.

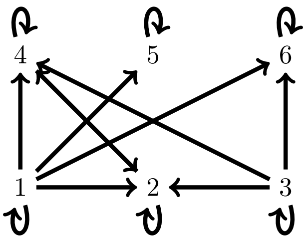
Si vede che $a \leq 2$ e, in effetti, $a = 2$, $b = 0$, $d = 9$ e $a = 2$, $b = 7$, $d = 9$ sono soluzioni.
La risposta è `2779`.

Soluzione del problema 16. Siano $\ell = 120\,\mathrm{m}$ e $d = 30\,\mathrm{m}$ le misure del lato di base del pentagono (e di ogni lato degli spioventi del tetto) e la distanza sullo spigolo del punto dove posizionare una bomba dal vertice dello spigolo in comune con il tetto. Il percorso più breve richiede un trasferimento ad uno spigolo lontano $\ell\sqrt{3}$ in linea d'aria per posare la quarta bomba e un trasferimento di ℓ per posizionare la quinta bomba.
Il percorso più breve per compiere il secondo è orizzontale, mentre si deve valutare quale delle due possibilità scegliere per il primo trasferimento. Il percorso orizzontale (che attraversa due facce laterali) è 2ℓ. L'altro percorso è il più breve che attraversa il tetto. Questo problema si riduce ad uno di geometria piana appiattendo il tetto e le facce:



Il percorso più breve che passa sopra al tetto è lungo $2[\frac{\sqrt{3}}{2}\ell + \frac{d}{2}] = \sqrt{3}\ell + d$. E' più breve di quello orizzontale esattamente quando $d < \left(2 - \sqrt{3}\right)\ell$. Nel caso in considerazione $30 < \left(2 - \sqrt{3}\right) 120$ (anche con l'approssimazione data in prima pagina) e la distanza minima totale è $\sqrt{3}\ell + d + \ell \approx 357,8$.
La risposta è `0357`.

Soluzione del problema 17. Le implicazioni tra risposte positive sono



La risposta è `0015`.

Soluzione del problema 18. Si consideri la disposizione delle palline nelle scatole come una permutazione dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Visto il numero di contendenti superiore a 4, Blofeld vince esattamente se c'è un ciclo di lunghezza almeno 6. Si tratta di contare quante sono le biiezioni con un ciclo di lunghezza almeno 6. Dato che una biiezione può avere al massimo un ciclo di lunghezza superiore a 5, le biiezioni con un ciclo di lunghezza n con $n > 5$ sono

$$\binom{10}{n}(n-1)!(10-n)! = \frac{10!}{n}$$

Di conseguenza, la probabilità che ci sia un ciclo di lunghezza superiore a 5 è

$$\frac{1}{10!}\sum_{n=6}^{10}\frac{10!}{n} = \sum_{n=6}^{10}\frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} = 0,645\overline{634920}$$

La risposta è `6456`.

Soluzione del problema 19. Denotiamo ciascun colore con il numero di apparizione sulla tabella a partire dall'angolo alto a sinistra spostandoci lungo le righe, una dopo l'altra. Tutti i colori compariranno almeno una volta nei primi sette riquadri. Considereremo separatamente i casi in cui sulla prima riga compiaono soltanto due colori o ne compaiono più di due.
Nel secondo caso le possibilità sono le seguenti

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&1\\\hline 3&4&1&2&3\\\hline \multicolumn{5}{|c|}{\vdots}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&3\\\hline 3&4&1&2&1\\\hline \multicolumn{5}{|c|}{\vdots}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&1&3&4\\\hline 4&3&4&2&1\\\hline \multicolumn{5}{|c|}{\vdots}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&2&1\\\hline 3&4&1&4&3\\\hline \multicolumn{5}{|c|}{\vdots}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&2&3\\\hline 3&4&1&4&1\\\hline \multicolumn{5}{|c|}{\vdots}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&1&2&3\\\hline 3&4&3&4&1\\\hline \multicolumn{5}{|c|}{\vdots}\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&1&3&1\\\hline 4&3&4&2&1\\\hline \multicolumn{5}{|c|}{\vdots}\end{array}$$

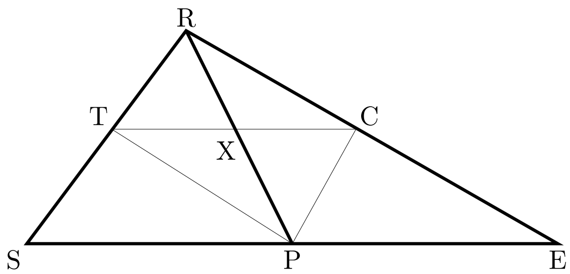
dove i puntini stanno ad indicare che la successione continua in modo univocamente determinato.
Nel primo caso le prime due righe sono necessariamente

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&1&2&1\\\hline 3&4&3&4&3\\\hline\end{array}$$

e proseguono con due possibili disposizioni per ogni riga successiva: ad esempio, la terza può essere $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&1&2&1\\\hline\end{array}$ oppure $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&1&2&1&2\\\hline\end{array}$.
I codici possibili sono $4!(7+2^8) = 24 \cdot 263 = 6312$.
La risposta è `6312`.

Soluzione del problema 20. In una tastiera come quella del problema il numero sul tasto in alto a sinistra è il quadrato $(2\ell+1)^2$ di un numero dispari. Non consideremo il tasto 1 in quanto segue dato che è l'unico tasto comune alle due diagonali. Il resto della tastiera è formata da ℓ perimetri quadrati di tasti, l'i-esimo perimetro quadrato con lati di $4i$ tasti. Siano $a_i > a'_i$ i due numeri sui tasti dellla diagonale principale sul perimetro dell'i-esimo quadrato, siano $b_i > b'_i$ i due numeri sui tasti dell'altra diagonale sul perimetro dello stesso quadrato. E' $b_i = a_i - 2i$ e $b'_i = a'_i - 2i$; perciò $(a_i + a'_i) - (b_i + b'_i) = 4i$. La differenza tra i numeri sui tasti di una diagonale e quelli dell'altra sulla tastiera è $\sum_{i=1}^{\ell} 4i = 2\ell(\ell+1)$. La richiesta che questa sia massima tra quelle minori di 2011 impone che $\ell = 31$. I tasti sono $(2 \cdot 31 + 1)^2 = 63^2 = 3969$.
La risposta è `3969`.

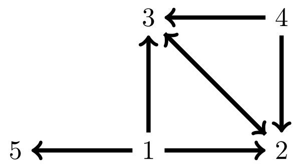
Soluzione del problema 21. Si applica il teorema della bisettrice ai triangoli SPR e RPE.



$$\frac{\text{RT}}{\text{TS}} = \frac{\text{RP}}{\text{PS}} = \frac{\text{RP}}{\text{PE}} = \frac{\text{RC}}{\text{CE}}.$$

Per il teorema di Talete, TC $\parallel$ SE e $\dfrac{\text{TX}}{\text{SP}} = \dfrac{\text{RT}}{\text{RS}}$.
Si trova $\dfrac{\text{RP}}{\text{PS}} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{\text{RT}}{\text{TS}} = \dfrac{3}{7}$; quindi $\text{TX} = 120 \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{360}{7} = 51,\overline{428571}$.
La risposta è `0051`.

Soluzione del problema 22. Implicazioni tra risposte positive a domande diverse sono



La risposta è 2102.

Soluzione del problema 23. Per determinare un triangolo ottusangolo con un vertice al centro, si fissi la seconda luce su una retta r per il vertice; la terza può trovarsi soltanto nel semipiano opposto determinato dalla retta p per il centro e perpendicolare a r. Tali luci sono $\frac{81-n}{2}$ per n il numero di luci su p (o su r, è lo stesso). Il numero di triangoli per ciascuna retta r sono $(n-1)\frac{81-2n+1}{2}$.
Le rette per il vertice in un semiquadrante sono 6: una ha 9 punti, una ne ha 5, quattro ne hanno 3.
Considerato che ogni triangolo viene contato due volte, i triangoli cercati sono $\frac{1}{2}4(1\cdot 8\cdot 32+1\cdot 4\cdot 36+4\cdot 2\cdot 38)=1408$.
La risposta è 1408.

Soluzione del problema 24. Si noti che tale triangolo sferico è ottenibile a partire da un ottavo di una sfera, ossia un triangolo sferico con tre angoli retti, semplicemente tracciando, dal centro di tale triangolo, sei archi di circonferenza massima che lo congiungano coi tre vertici e i tre punti medi dei lati. Ognuno di questi ottavi sarà formato da sei dei triangoli richiesti. L'area cercata è $\frac{6000}{48}=125$.
La risposta è 0125.